Déterminants de taille inférieure à 3

Exercice 1: Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \\ \mathrm{j} & 1 & \mathrm{j}^2 \\ \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} & 1 \end{vmatrix} \text{ où } \mathrm{j} = \mathbf{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$$

Exercice 2:

1. Déterminer une expression simplifiée de $f : \lambda \mapsto \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & -2 \\ 2 & \lambda-1 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$.
2. Déterminer une expression factorisée de f et déterminer les zéros de f.

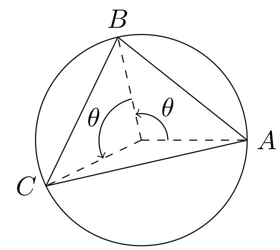
Exercice 3: Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les scalaires a, b, c, d pour que la matrice M soit inversible, et calculer alors M^{-1}.

Exercice 4: Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$.

1. Calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$.
2. On s'intéresse à la matrice $A = \begin{pmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{pmatrix}$.
   (a) Exprimer $\det(A)$ comme une somme de déterminants.
   (b) En déduire $\det(A)$.

Exercice 5: *Utilisation du déterminant en géométrie*

1. A quelle condition sur $m \in \mathbb{R}$ les points du plan $A(1, 0)$, $B(1, m)$ et $C(m, 3)$ sont-ils alignés ?
2. Dans l'espace, notons $\mathscr{P}$ le plan contenant les points $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 3)$ et $C(-1, 4, 2)$. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur x, y et z afin que le point $M(x, y, z)$ appartienne au plan $\mathscr{P}$.
3. Dans le plan, déterminer les angles $\theta \in [0, \pi]$ pour lesquels l'aire du triangle ABC de sommets d'affixes 1, $\mathbf{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\mathbf{e}^{2\mathrm{i}\theta}$ est maximale.



Déterminants de taille 4

Exercice 6: Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \text{ et } D_2 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

Exercice 7: Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la matrice suivante est-elle inversible ?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 & m \\ -1 & 1 & -m & -m \\ m & 1 & 1 & m \\ m & -1 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

Déterminants de taille n

Exercice 8: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{[n]}$$

1. Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Exprimer D_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Vérifier votre formule pour $n = 3$.

Exercice 9: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si n est impair alors $\det(M) = 0$.
2. Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = -I_n$.
   Montrer que n est pair et donner les valeurs possibles de $\det(B)$.

Exercice 10: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer $\begin{vmatrix} 0 & & \lambda_1 \\ & \iddots & \\ \lambda_n & & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$
2. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ définie par $a_{i,j} = \min(i,j)$.
   Déterminer $\det(A)$.
3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & & & \iddots & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b & a & 0 & \vdots \\ 0 & \iddots & & & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix}_{[2n]} = (a^2 - b^2)^n$$

4. [**] Calculer $\begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & ... & 2 \\ 2 & 1 & \ddots & ... & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & & \ddots & 1 & n \\ n & n-1 & ... & 2 & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$

Déterminants d'endomorphismes

Exercice 11:
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le déterminant des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ suivants :

$$f : P \mapsto P + P', \quad g : P \mapsto XP' + P(1), \quad h : P \mapsto P(X+1) - P$$

Exercice 12:

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la trace[1] et le déterminant d'une projection et d'une symétrie en fonction de la dimension de leur sous-espaces caractéristiques.
2. Application : calculer la trace et le déterminant de l'endomorphisme φ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\varphi : A \mapsto A^T$.

Applications du déterminant

Exercice 13:
Soient $P_0 = 1 + X + X^2$, $P_1 = 1 + X + X^3$, $P_2 = 1 + X^2 + X^3$, $P_3 = X + X^2 + X^3$.
Montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) forme une base de $\mathbb{R}_3[X]$ en utilisant un déterminant.

Exercice 14: Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer : $\exists! \, P \in \mathbb{R}_n[X]$, $X^2P'' + XP' + P = (X+1)^n$.
On pourra introduire l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ suivant $f : P \mapsto X^2P'' + XP' + P$.

Exercice 15: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On note f_A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

1. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_A(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.
2. En déduire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_A(\lambda) = 0$, il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = \lambda X$.
   Dans ce cas, on dit que λ est une valeur propre de A, que $Ker(A - \lambda I_n)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ et que X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.
3. Dans cette question, on considère que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Expliciter la fonction χ_A et déterminer ses zéros que l'on notera par la suite λ_1 et λ_2.
   (b) Pour tout $i \in [\![1;2]\!]$, choisir un vecteur non nul dans $\mathrm{Ker}(A - \lambda_i I_2)$, on notera X_i ce vecteur.
   (c) Calculer la matrice de l'endomorphisme $X \mapsto AX$ de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ dans la base canonique, puis la matrice du même endomorphisme dans la base (X_1, X_2). En déduire que A est semblable à une matrice diagonale D.
   (d) Déterminer A^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.

[1] On rappelle que la trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux et que deux matrices semblables ont la même trace. On peut donc définir la trace d'un endomorphisme comme la trace de la matrice de cet endomorphisme dans n'importe quelle base.